

Änderungsrate und stärkstes Wachstum

Beispiel:

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$ und $D_f = \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Stelle mit der stärksten Zunahme der Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen von f .

$$f'(x) = -x^2 + 6x - 5$$

$$-x^2 + 6x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 5$$

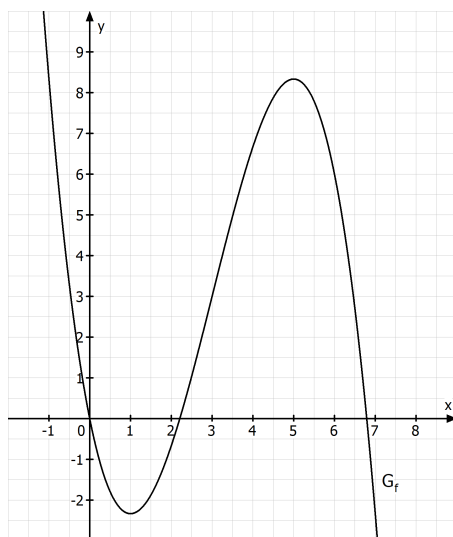
Skizze von f' :

$$f''(x) = -2x + 6 \quad -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$\Rightarrow G_f$ ist im Bereich $[1; 5]$ sms

$\Rightarrow G_f$ hat bei $x = 3$ das absolute Maximum

$\Rightarrow x = 3$ ist die Stelle, an der G_f die stärkste Zunahme aufweist



Bei einer ganzrationalen Funktion f mit $D_f = \mathbb{R}$ geben die Funktionswerte $f'(x)$ der ersten Ableitung die lokale Änderungsrate der Funktionswerte $f(x)$ an.

Die Stellen lokal stärkster Zunahme bzw. Abnahme der Funktionswerte $f(x)$ ermittelt man mithilfe der Extremstellen der ersten Ableitung. Also kommen hier die Wendestellen von f infrage.

Bei einer Maximalstelle x_0 von f' mit $f'(x_0) > 0$ liegt eine Stelle lokal stärkster Zunahme von f vor.

Bei einer Minimalstelle x_0 von f' mit $f'(x_0) < 0$ liegt eine Stelle lokal stärkster Abnahme von f vor.

Aufgaben:

1.0 Für den Jahresbericht einer Firma, die T-Shirts vertreibt, soll die Entwicklung der Umsatzzahlen untersucht werden. Der Absatz zwischen Anfang März und Anfang September des vergangenen Jahres lässt sich durch die Funktion A mit der

Gleichung $A(t) = \frac{1}{9}t^3 - \frac{7}{3}t^2 + 15t - 27$ und der Definitionsmenge $D_A = [3;9]$ beschreiben.

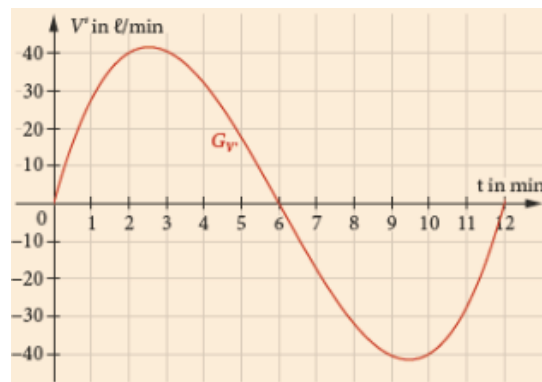
Der Absatz $A(t)$ zum Zeitpunkt t wird in ME angegeben, wobei eine ME für 100000 T-Shirts steht und t für Monate.

1.1 Ermitteln Sie den Zeitraum der Absatzabnahme. ○

1.2 Bestimmen Sie den Zeitpunkt der stärksten Abnahme. ⊗

2.0 Die Funktion V gibt modellhaft das Volumen des Wassers in einem Wasserbehälter in Litern an.

Durch Zufluss und Abfluss ändert sich das Volumen laufend. Das Diagramm zeigt die Änderungsrate $V'(t)$ im Zeitraum von 0 bis 12 Minuten (ohne Hilfsmittel).



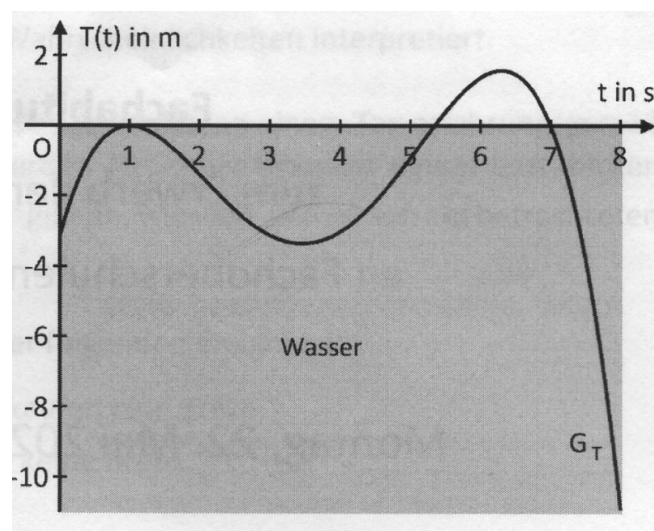
2.1 Bestimmen Sie näherungsweise die Koordinaten der Punkte $V'(0)$, $V'(1,5)$, $V'(6)$, $V'(9,5)$ und $V'(12)$. ○

2.2 Interpretieren Sie den Verlauf der Kurve und die Koordinaten der Punkte im Sachzusammenhang. ⊗

2.3 Geben Sie die stärkste Zunahme und die stärkste Abnahme des Volumens an. ⊗

3.0 Das Auf- und Abtauchverhalten eines Delfins im Meer wird mittels eines an ihm angebrachten Sensors untersucht. Die momentane Höhe des Sensors in Metern bezogen auf die Wasseroberfläche in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden lässt sich annähernd durch die Funktionswerte der Funktion T beschreiben.

Der Graph der Funktion T wird mit G_T bezeichnet und ist im Zeitraum von 0 bis 8 Sekunden im nebenstehenden Koordinatensystem abgebildet.



Die Funktion T ist eine ganzrationale Funktion vierten Grades und zum Zeitpunkt $t_1 = 1$ befindet sich der Delfin an der Wasseroberfläche. Bei den Berechnungen kann auf das Mitführen von Einheiten verzichtet werden.

Die Funktion T ist gegeben durch die Funktionsgleichung

$$T(t) = -\frac{1}{12} \left(t^4 - \frac{43}{3} t^3 + 63t^2 - 87t + \frac{112}{3} \right) \text{ mit der Definitionsmenge } D_T = [0; 8].$$

Runden Sie Ihre Ergebnisse gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen.
(Abitur 2023 AI)

3.1 Bestimmen Sie die Wertemenge W_T der Funktion T und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang.

3.2 Für $t \in]1,5; 3[$ befindet sich der Delfin unter Wasser. Ermitteln Sie rechnerisch, ob in diesem Zeitintervall der Betrag der größten Abtauchgeschwindigkeit größer als der Betrag der größten Auftauchgeschwindigkeit ist.

Lösungen:

1.1

$$A'(t) = \frac{1}{3}t^2 - \frac{14}{3}t + 15$$

$$\frac{1}{3}t^2 - \frac{14}{3}t + 15 = 0 \Rightarrow t_1 = 5 \quad t_2 = 9$$

Skizze von A':

 $\Rightarrow$ Der Absatz fällt von Anfang Mai bis Anfang September

1.2

$$A''(t) = \frac{2}{3}t - \frac{14}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}t - \frac{14}{3} = 0 \Rightarrow t = 7$$

Skizze von A':

 $\Rightarrow t = 7$ absoluter Tiefpunkt von A' $\Rightarrow t = 7$ Stelle mit stärkster Abnahme von A(t) $\Rightarrow$ Anfang Juli ist der Absatzrückgang am größten

$$2.1 \quad V'(0) = 0 \quad V'(1,5) = 35 \quad V'(6) = 0 \quad V'(9,5) = -42 \quad V'(12) = 0$$

2.2 Am Anfang gibt es weder Zu- noch Ablauf. Der Zufluss steigt an bis zum Wert 42 l/min zum

Zeitpunkt $t = 2,5$ min. Der Zufluss nimmt danach ab, bis er zum Zeitpunkt $t = 6$ min ganz versiegt.Danach nimmt der Abfluss zu bis zum Zeitpunkt $t = 9,5$ min, an dem er 42 l/min beträgt.Dann nimmt der Abfluss ab und zum Zeitpunkt $t = 12$ min ist er 0 l/min.

2.3 Stärkste Zunahme: 42 l/min

Stärkste Abnahme: 42 l/min

3.1

$$T'(t) = -\frac{1}{12}(4t^3 - 43t^2 + 126t - 87)$$

$$-\frac{1}{12}(4t^3 - 43t^2 + 126t - 87) = 0 \Rightarrow 4t^3 - 43t^2 + 126t - 87 = 0 \Rightarrow t_1 = 1$$

$$(4t^3 - 43t^2 + 126t - 87) : (t - 1) = 4t^2 - 39t + 87$$

$$4t^2 - 39t + 87 = 0 \Rightarrow t_{2/3} = \frac{39 \pm \sqrt{1521 - 4 \cdot 4 \cdot 87}}{8} = \frac{39 \pm \sqrt{129}}{8}$$

$$\Rightarrow t_2 \approx 6,29 \quad t_3 \approx 3,46$$

Nach Abbildung absolutes Maximum bei $t = 6,29$ und absolutes Minimum bei $t = 8$.

$$T(6,29) = 1,58 \quad T(8) = -10,89 \Rightarrow W_T = [-10,89; 1,58]$$

Der Delfin erreicht im betrachteten Zeitraum eine maximale Höhe von 1,58 m und eine maximale Tiefe von 10,89 m.

3.2

$$T''(t) = -\frac{1}{12}(12t^2 - 86t + 126)$$

$$-\frac{1}{12}(12t^2 - 86t + 126) = 0 \Rightarrow 12t^2 - 86t + 126 = 0$$

$$\Rightarrow t_{1/2} = \frac{86 \pm \sqrt{7396 - 4 \cdot 12 \cdot 126}}{24} = \frac{86 \pm \sqrt{1348}}{24} \quad t_1 \approx 5,11 \quad t_2 \approx 2,05$$

Nach Abbildung liegt die größte Auftauchgeschwindigkeit bei $t = 5,11$ und die größte Abtauchgeschwindigkeit bei $t = 2,05$.

$$T'(5,11) = 2,69 \quad T'(2,05) = -2,09$$

Der Betrag der größten Auftauchgeschwindigkeit ist größer als der Betrag der größten Abtauchgeschwindigkeit.